



# Modélisation de multicouches avec interfaces souples ou élastoplastiques par éléments finis plaque = 2D finite element for Multi layer with elastoplastic interfaces

van Anh Duong, Jean-François Caron, Taï Duc Nguyen

## ► To cite this version:

van Anh Duong, Jean-François Caron, Taï Duc Nguyen. Modélisation de multicouches avec interfaces souples ou élastoplastiques par éléments finis plaque = 2D finite element for Multi layer with elastoplastic interfaces. JNC 16, Jun 2009, Toulouse, France. 10 p. hal-00391705

**HAL Id: hal-00391705**

**<https://hal.science/hal-00391705>**

Submitted on 11 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation de multicouches avec interfaces souples ou élastoplastiques par éléments finis plaque

## *2D finite element for Multi layer with elastoplastic interfaces*

V.A. Duong, J.F. Caron, D.T. Nguyen

UR Navier - Université Paris-Est. École des Ponts Paris Tech,  
6 et 8 avenue Blaise Pascal.  
77455 Marne-la-Vallée cedex2  
e-mail : caron@enpc.fr

### Résumé

Un nouveau développement d'un élément fini de type layer-wise, une cinématique par couche, et des applications, sont proposées ici. Ce modèle comporte  $5n$  champs cinématiques pour un multicouche à  $n$  couches. *MPFEAP* (Multi Particular Finite Element Analysis Program, un élément-fini à  $8n$  noeuds) propose désormais, un module dynamique mais également la prise en compte d'interface non linéaires ou imparfaites. Les exemples proposés ici concernent le champ du génie civil, collage et connexions de poutres mixtes par connecteurs discrets.

### Abstract

An adaptation of elasto-plastic material constitutive model to adhesive joints and no-perfect connection is developed and introduced to the Multiparticle Model of Multilayered Materials (M4) where the laminated plate is considered as a superposition of Reissner plate coupled by interfacial stresses. The adhesive joint behavior obey Von-Mises criterion. An eight-node multiparticle element is developed. The model is validated with 3D finite element method to calculate a double-lap joint and a composite beam (concrete-wood).

**Mots Clés :** éléments finis, composites, interface, connexion, collage

**Keywords :** finite element, composites, layerwise, interface, bonding

## 1. Introduction

Dans le domaine de l'assemblage, les structures considérées deviennent de fait des multicouches et les problématiques d'interface, largement étudiées par exemple pour les structures composites aéronautiques, se retrouvent au coeur du dimensionnement. Dans le cas d'un collage par exemple, les phénomènes tridimensionnels en extrémité de joint ne peuvent se traiter par une approche 2D classique dès que l'on cherche à mettre en place un critère de rupture efficace. De plus l'épaisseur du joint n'est pas toujours assez faible pour pouvoir ne pas faire intervenir les propriétés intrinsèques du matériau colle. Pour une poutre mixte (béton-acier, bois-béton...) , assemblée par connecteurs discrets, là encore se posent des aspects hors plan assez cruciaux en terme de dimensionnement. Cependant pour ces deux exemples, proposer aux concepteurs des outils 3D de type EF n'est sans doute pas la solution la meilleure. Tout d'abord parce que s'adressant à des bureaux d'étude, ces outils doivent être relativement rapides et simples d'emploi, permettant leur intégration dans une démarche règlements et recommandations. Mais surtout, la gestion des singularités et dépendances aux maillages rend très délicat l'utilisation des codes 3D standards, et exige d'exhiber des grandeurs simples et pertinentes, reposant sur des concepts mécaniques solides. Ce sont ces raisonnements qui ont déjà guidé les travaux concernant les structures stratifiées, et de nombreux modèles spécifiques de multicouches ont été mis en place afin de proposer des outils d'estimations de contraintes aux interfaces et donc des critères pertinents. Ces approches couplent généralement calculs raffinés des champs de contraintes, ([1],[2],[3]...) et des interfaces sans épaisseur, zones cohésives, dans lesquelles on peut rentrer la physique de l'interface en question et son comportement (introduction de la mécanique de l'endommagement dans les interfaces [4] [5], comportements non linéaires des interfaces par exemple [6]). Dans cet esprit un élément fini à une cinématique par couche, est proposé ici afin de prévoir la mécanique du multicouche ayant des interfaces "imparfaites". Il est basé sur les travaux de l'équipe multicouche de l'institut Navier [7][2] qui s'inspirent du modèle de Pagano [8]. Ce modèle comporte  $5n$  champs cinématiques pour un multicouche à  $n$  couches et porte le nom "M4-5N". Il approche chaque couche par une plaque de Reissner et intègre des efforts d'interface généralisés. Il rejoint ainsi la famille des modèles layerwise ([1],[9]...). La première version du code d'élément fini appelé

*MPFEAP* (MultiParticle Finite Element Analysis Program) a été implémentée [10]. Cet article a pour but de présenter les récents développement de *MPFEAP* qui propose désormais, un module dynamique et une prise en compte d'interfaces non linéaires ou imparfaites.

## 2. Le modèle M4-5n avec discontinuité d'interface

Le modèle *M4-5n* initialement développé pour l'analyse des effets de bords et l'initiation du délaminage ([7] [11]) est donc spécifiquement dévolu à l'étude des phénomènes d'interfaces. L'introduction des efforts et déformations d'interface en fait un outil puissant pour l'étude des délaminages ou autres glissements. Des grandeurs généralisées de type plaque par couche (équivalente à une plaque de Reissner) et interfaces, vérifient des équations d'équilibre et de comportement. On rappelle ici, les grandeurs et équations que l'on pourra retrouver dans [2] par exemple. Pour  $n$  couches et  $i = 1..n$  et  $j = 1..n - 1$ ,  $\omega$  le plan des couches,  $\tilde{U}, \tilde{A}$  respectivement vecteur et tenseur quelconque du plan :

- efforts intérieurs généralisés  $\tilde{N}^i, \tilde{M}^i, \tilde{Q}^i, \tau^{i,j+1}$  et  $v^{j,j+1}$ , tensions, moments, efforts tranchants dans les couches et cisaillements et arrachement d'interface
- les déformations généralisées respectivement associées  $\tilde{\epsilon}^i, \tilde{\chi}^i, \tilde{\gamma}^i, \tilde{D}^{i,j+1}$  et  $D_v^{j,j+1}$

Reliés par les équations d'équilibre suivante pour  $i = 1..n$

$$\begin{aligned} \tilde{div} \tilde{N}^i(x, y) + \tau^{i,i+1}(x, y) - \tau^{i-1,i}(x, y) &= 0 & \text{sur } \omega \\ \tilde{div} \tilde{Q}^i + v^{i,i+1}(x, y) - v^{i-1,i}(x, y) &= 0 & \text{sur } \omega \\ \tilde{div} \tilde{M}^i(x, y) - \tilde{Q}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} (\tau^{i,i+1}(x, y) + \tau^{i-1,i}(x, y)) &= 0 & \text{sur } \omega \end{aligned}$$

Le modèle original considère l'interface comme parfaite et sans épaisseur et le comportement que l'on trouvera dans [2] a déjà été enrichi par Diaz [11][12]. Une discontinuité a été introduite dans la formulation qui permet une non linéarité au niveau de l'interface, jeu, glissement élastique, plastique parfaite ou autre.

On pourra retrouver dans [11] les étapes conduisant à l'expression générale du comportement tenant compte de ces déformations anélastiques d'interface,  $\tilde{D}^{i,i+1^{an}}(x, y)$  et  $\tilde{D}_v^{i,i+1^{an}}(x, y)$ , respectivement déformations en cisaillements et en arrachement :

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}^i(x, y) &= \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y) \\ \tilde{\chi}^i(x, y) &= \frac{12}{(e^i)^3} \tilde{S}^i : \tilde{M}^i(x, y) \\ \tilde{\gamma}^i(x, y) &= \frac{6}{5e^i} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot (\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i}) \\ \tilde{D}^{i,i+1}(x, y) - \tilde{D}^{i,i+1^{an}}(x, y) &= -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{Q}^{i+1} - \frac{e^i}{30} \tilde{S}_Q^i \cdot \tau^{i-1,i} \\ &\quad + \frac{2}{15} (e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{S}_Q^{i+1}) \cdot \tau^{i,i+1} - \frac{e^{i+1}}{30} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tau^{i+1,i+2} \\ D_v^{i,i+1}(x, y) - \tilde{D}_v^{i,i+1^{an}}(x, y) &= \frac{9}{70} e^i S_v^i v^{i-1,i} + \frac{13}{35} (e^i S_v^i + e^{i+1} S_v^{i+1}) v^{i,i+1} \\ &\quad + \frac{9}{70} e^{i+1} S_v^{i+1} v^{i+1,i+2} \end{aligned} \quad (\text{eq. 1})$$

Cette formulation a tout d'abord été mis en place pour l'étude d'une interface frontière de stratifié, c'est à dire sans épaisseur et sans comportement intrinsèque [11].

Dans le développement présenté, on propose des extensions de cette approche et l'introduction dans *MPFEAP* en se concentrant sur deux problématiques particulières, celle des jeux élastiques introduits par des connecteurs dans une poutre mixte par exemple et celle du collage avec une interface particulière élastoplastique.

## 3. Modèle de connecteur élastique

Il s'agit là de proposer une analyse et modélisation des glissements aux interfaces des assemblages imparfaitement connectés, tel que c'est le cas lorsque bois et béton ou béton et acier sont liés par des connecteurs discrets. La

figure 1 montre quelques exemples de ce type de connexions que l'on rencontre dans le génie civil et la construction. Dans l'eurocode bois, des recommandations sont faites pour essayer de prendre en compte les pertes de rigidité de l'assemblage dues à la connexion imparfaite. On trouvera dans [13] un travail approfondi sur ces aspects et une proposition de solution analytique simple basée sur une version simplifiée du modèle.



FIG. 1. Exemples de connecteurs bois-béton

Dans cette première application seuls les cisaillements étaient considérés, négligeant ainsi les aspects de pe-lage. L'interface frontière (sans épaisseur, comme dans l'approche stratifiée [11]) est ici représentée par trois ressorts élastiques indépendants entre eux dans les trois directions principales de l'interface. La rigidité de chaque ressort représente la relation linéaire entre le glissement de l'interface et la contrainte suivant la direction correspondante. Il n'existe pas de couplage entre les directions.

La loi de comportement (eq. 1), devient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}^i(x, y) &= \frac{\tilde{S}^i}{e^i} : \tilde{N}^i(x, y) \\
 \tilde{\chi}^i(x, y) &= \frac{12}{(e^i)^3} \tilde{S}^i : \tilde{M}^i(x, y) \\
 \tilde{\gamma}^i(x, y) &= \frac{6}{5e^i} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \\
 \tilde{D}^{i,i+1}(x, y) &= -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{Q}^{i+1} - \frac{e^i}{30} \tilde{S}_Q^i \cdot \tilde{\tau}^{i-1,i} \\
 &\quad + \frac{2}{15} (e^i \tilde{S}_Q^i + e^{i+1} \tilde{Q}^{i+1}) \cdot \tilde{\tau}^{i,i+1} - \frac{e^{i+1}}{30} \tilde{S}_Q^{i+1} \cdot \tilde{\tau}^{i+1,i+2} + \tilde{S}^{i,i+1} \tilde{\tau}^{i,i+1} \\
 \tilde{D}_V^{i,i+1}(x, y) &= \frac{9}{70} e^i S_V^i v^{i-1,i} + \frac{13}{35} (e^i S_V^i + e^{i+1} S_V^{i+1}) v^{i,i+1} \\
 &\quad + \frac{9}{70} e^{i+1} S_V^{i+1} v^{i+1,i+2} + S_V^{i,i+1} v^{i,i+1}
 \end{aligned}
 \tag{eq. 2}$$

où les glissements généralisés anélastiques à l'interface  $\tilde{D}^{i,i+1,an}(x, y)$  et  $\tilde{D}_V^{i,i+1,an}(x, y)$  deviennent :

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{i,i+1,an}(x, y) &= \begin{bmatrix} D_1^{i,i+1} \\ D_2^{i,i+1} \end{bmatrix} = \tilde{S}^{i,i+1} \tilde{\tau}^{i,i+1} \\
 \tilde{D}_V^{i,i+1,an}(x, y) &= S_V^{i,i+1} v^{i,i+1}
 \end{aligned}
 \tag{eq. 3}$$

avec la matrice de souplesse de cisaillement de l'interface  $(i, i+1)$ ,  $\tilde{S}^{i,i+1}$  et la matrice de souplesse normale  $S_V^{i,i+1}$  de l'interface définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}^{i,i+1} &= \begin{bmatrix} 1/k_x^{i,i+1} & 0 \\ 0 & 1/k_y^{i,i+1} \end{bmatrix} \\
 S_V^{i,i+1} &= 1/k_v^{i,i+1}
 \end{aligned}
 \tag{eq. 4}$$

Les efforts dans l'interface se composent de trois composantes :  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{33}$  correspondant respectivement à deux contraintes de cisaillement et la contrainte normale. La relation entre les efforts et les glissements d'interface

élastiques  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  s'écrit sous la forme :

$$\delta_\alpha = S_{\alpha\beta} \sigma_{\beta 3} \quad \delta_3 = S_{33} \sigma_{33} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (\text{eq. 5})$$

Ce modèle appartient à la famille des modèles d'interface cohésifs, et est simple à introduire dans les codes d'éléments finis. En fonction de son besoin, chaque auteur choisit une forme de  $\mathbf{S}$  à implémenter dans son modèle. Quelques auteurs ([14]...), acceptent une rigidité de l'interface calculée à travers les propriétés des couches, d'autres [12] calculent la rigidité de l'interface à partir des propriétés de l'interface, d'autres enfin [15] utilisent des coefficients expérimentaux. Ce sera le cas ici puisqu'il s'agit de caractériser des connecteurs. Dans tous les modèles, l'interface n'a pas d'épaisseur. On trouvera dans [16] les détails de l'implémentation

On considère une poutre mixte bois-béton sur appuis simples (fig. 2).



FIG. 2. La poutre mixte en bois-béton considérée (3.2m) et le dispositif d'essai

La couche supérieure est en béton et celle inférieure en bois. Une charge uniforme est imposée à la surface supérieure de la poutre. La figure 3 montre le maillage 2D que permet l'utilisation de *MPFEAP*.

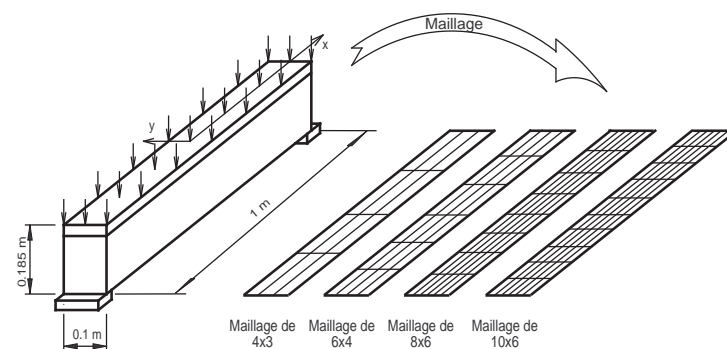


FIG. 3. La poutre mixte en bois-béton considérée et son maillage 2D

On choisit une interface assez faible pour bien mettre en valeur le glissement. La rigidité choisie de l'interface correspond à celle identifiée par le modèle analytique pour un connecteur métallique discret classiquement utilisé.

Les contraintes de cisaillement  $\tau_x$  présentées dans la fig. 4 sont en accord avec les résultats de la solution analytique ([13]). La figure montre également une bonne convergence du résultat avec le raffinement du maillage. Même un maillage 2D très grossier donne le bon profil du cisaillement à l'interface, mais pour s'approcher des valeurs de contrainte au bord, un raffinement peut être utile. Cette approche peut s'appliquer à des configurations 3D plus complexes, et fournir du fait de sa nature 2D un outil (*MPFEAP*) simple pour le dimensionnement.

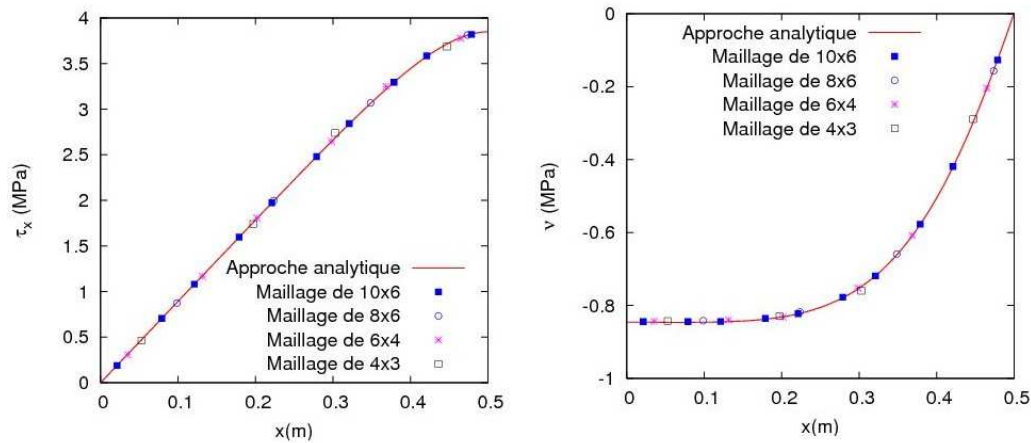


FIG. 4. Les contraintes généralisées de cisaillement et d'arrachement à l'interface de la poutre mixte considérée

### 3.1 Modèle de couche interfaciale élastoplastique parfaite

Le deuxième développement interface réalisé a pour but de modéliser la couche de colle ou résine existante dans les interfaces de composites et ici surtout dans les joints collés. L'interface considérée est élasto-plastique parfaite obéissant au critère de Von-Mises. Une amélioration serait de prendre un comportement plus réaliste (Drucker Prager par exemple) pour les situations en mode mixte. Contrairement à ce qui a été fait auparavant dans [11] (ou dans la poutre mixte ci-dessus) où la colle était une simple frontière entre les couches, ici l'interface-colle a une épaisseur physique. On peut ainsi introduire un comportement de colle. Cependant le milieu reste une interface au sens où elle ne travaille qu'hors plan, cisaillements transverses et contrainte normale. L'épaisseur reste faible devant les autres dimensions structurales. On voit sur la figure 5 un joint epoxy collé avant puis après avoir été sollicité (déchargé). La description proposée semble adaptée et conforme à la physique du phénomène.

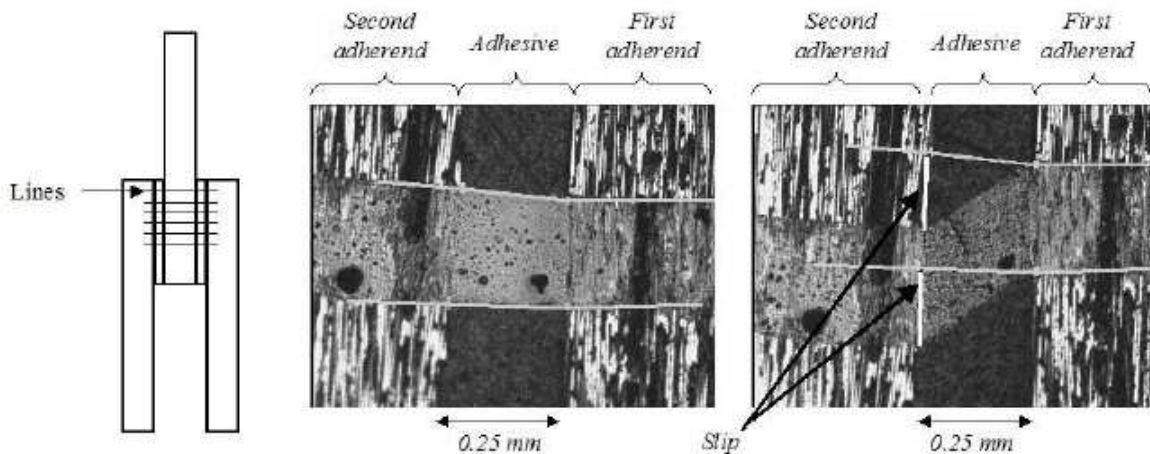


FIG. 5. Glissement plastique dans un joint collé epoxy [17]

Dans cette section, un modèle 3D élasto-plastique de la colle obéissant à un critère Von-Mises est adapté et implémenté dans le modèle  $\mathcal{M}4-5n$ . Ce modèle suppose que l'interface-colle ne subit que des contraintes de cisaillement  $\tau_x, \tau_y$  et d'arrachement  $v$ . En introduisant dans le modèle une telle couche-interface, on peut identifier les équations constitutives de cette interface qui relient les déformations généralisées de cisaillement d'interface  $\tilde{D}^{j,j+1}(x, y)$  aux efforts généralisés d'interface de cisaillement  $\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y)$  et d'arrachement  $\tilde{v}^{j,j+1}(x, y)$

La colle est caractérisée par :



- Épaisseur :  $e^{j,j+1}$
- Module d'Young :  $E^{j,j+1}$
- Coefficient de Poisson  $\nu^{j,j+1}$

La relation entre le glissement de la colle et les contraintes de l'interface généralisées est formulée en faisant l'intégrale de la déformation tridimensionnelle. Les glissements  $D_1^{j,j+1}(x, y)$ ,  $D_2^{j,j+1}(x, y)$ ,  $D_3^{j,j+1}(x, y)$  s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} D_1^{j,j+1}(x, y) &= D_1^{j,j+1^e}(x, y) + D_1^{j,j+1^p}(x, y) = \int_{e^{j,j+1}} U_{1,3}(x, y, z) dz \\ D_2^{j,j+1}(x, y) &= D_2^{j,j+1^e}(x, y) + D_2^{j,j+1^p}(x, y) = \int_{e^{j,j+1}} U_{2,3}(x, y, z) dz \\ D_3^{j,j+1}(x, y) &= D_3^{j,j+1^e}(x, y) + D_3^{j,j+1^p}(x, y) = \int_{e^{j,j+1}} U_{3,3}(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (\text{eq. 6})$$

où la déformation plastique  $D_i^{j,j+1^p}(x, y)$  est la contribution anélastique  $D_i^{j,j+1^{an}}(x, y)$  de l'équation eq. 1.

En supposant que la déformation de la colle ne varie pas suivant l'épaisseur de la colle ( $\epsilon(x, y, z) = \epsilon(x, y)$ ), donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{e^{j,j+1}} \epsilon_{31}^{j,j+1}(x, y, z) dz &= e^{j,j+1} \epsilon_{31}^{j,j+1}(x, y) \\ \int_{e^{j,j+1}} \epsilon_{32}^{j,j+1}(x, y, z) dz &= e^{j,j+1} \epsilon_{32}^{j,j+1}(x, y) \\ \int_{e^{j,j+1}} \epsilon_{33}^{j,j+1}(x, y, z) dz &= e^{j,j+1} \epsilon_{33}^{j,j+1}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{eq. 7})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{e^{j,j+1}} \epsilon_{31}^{j,j+1}(x, y, z) dz &= \frac{1}{2} \int_{e^{j,j+1}} (U_{1,3} + U_{3,1})(x, y, z) dz = \frac{1}{2} (D_1^{j,j+1}(x, y) + g_1^{j,j+1}(x, y)) \\ \int_{e^{j,j+1}} \epsilon_{32}^{j,j+1}(x, y, z) dz &= \frac{1}{2} \int_{e^{j,j+1}} (U_{2,3} + U_{3,2})(x, y, z) dz = \frac{1}{2} (D_2^{j,j+1}(x, y) + g_2^{j,j+1}(x, y)) \\ \int_{e^{j,j+1}} \epsilon_{33}^{j,j+1}(x, y, z) dz &= \int_{e^{j,j+1}} U_{3,3}(x, y, z) dz = D_3^{j,j+1}(x, y) \end{aligned} \quad (\text{eq. 8})$$

$$\text{où } g_1^{j,j+1}(x, y) = \int_{e^{j,j+1}} U_{3,1}(x, y, z) dz \quad \text{et} \quad g_2^{j,j+1}(x, y) = \int_{e^{j,j+1}} U_{3,2}(x, y, z) dz.$$

En première approximation le déplacement  $U_3$  de l'interface peut être interpolés à partir des déplacements des deux couches adjacentes. On en déduit les équations suivantes :

$$\begin{aligned} g_1^{j,j+1}(x, y) &= e^{j,j+1} \left( \frac{U_{3,1}^j(x, y) e^{j+1} + U_{3,1}^{j+1}(x, y) e^j}{e^j + e^{j+1}} \right) \\ g_2^{j,j+1}(x, y) &= e^{j,j+1} \left( \frac{U_{3,2}^j(x, y) e^{j+1} + U_{3,2}^{j+1}(x, y) e^j}{e^j + e^{j+1}} \right) \end{aligned} \quad (\text{eq. 9})$$

La colle est supposée isotrope, donc, les équations constitutives du matériau de la colle en 3D s'écrivent :

$$\begin{aligned} \epsilon_{31}^{j,j+1^e}(x, y, z) &= \frac{(1 + \nu^{j,j+1})}{E^{j,j+1}} \sigma_{31}^{j,j+1}(x, y, z) \\ \epsilon_{32}^{j,j+1^e}(x, y, z) &= \frac{(1 + \nu^{j,j+1})}{E^{j,j+1}} \sigma_{32}^{j,j+1}(x, y, z) \\ \epsilon_{33}^{j,j+1^e}(x, y, z) &= \frac{1}{E^{j,j+1}} \sigma_{33}^{j,j+1}(x, y, z) \end{aligned} \quad (\text{eq. 10})$$

En se basant sur les équations eq. 6- eq. 10, on peut trouver par exemple la relation suivante :

$$\begin{aligned}
D_1^{j,j+1}(x,y) &= 2 \int_{\theta^{j,j+1}} \varepsilon_{31}^{j,j+1}(x,y,z) dz - g_1^{j,j+1}(x,y) \\
&= 2 \int_{\theta^{j,j+1}} \varepsilon_{31}^{j,j+1^e}(x,y,z) dz + 2 \int_{\theta^{j,j+1}} \varepsilon_{31}^{j,j+1^p}(x,y,z) dz - g_1^{j,j+1}(x,y) \\
&= \frac{2e^{j,j+1}(1+v^{j,j+1})}{E_{j,j+1}} \tau_x^{j,j+1}(x,y) + D_1^{j,j+1^p}(x,y) - g_1^{j,j+1}(x,y)
\end{aligned}
\tag{eq. 11}$$

On a donc les équations constitutives s'écrivent :

$$\begin{aligned}
D_1^{j,j+1}(x,y) &= \frac{2e^{j,j+1}(1+v^{j,j+1})}{E_{j,j+1}} \tau_x^{j,j+1}(x,y) - g_1^{j,j+1}(x,y) + D_1^{j,j+1^p}(x,y) \\
D_2^{j,j+1}(x,y) &= \frac{2e^{j,j+1}(1+v^{j,j+1})}{E_{j,j+1}} \tau_y^{j,j+1}(x,y) - g_2^{j,j+1}(x,y) + D_2^{j,j+1^p}(x,y) \\
D_3^{j,j+1}(x,y) &= \frac{e^{j,j+1}}{E_{j,j+1}} v^{j,j+1}(x,y) + D_3^{j,j+1^p}(x,y)
\end{aligned}
\tag{eq. 12}$$

où  $D_1^{j,j+1^p}(x,y)$ ,  $D_2^{j,j+1^p}(x,y)$ ,  $D_3^{j,j+1^p}(x,y)$  sont les glissements dus aux déplacements plastiques de la colle, matériau plastique parfait incompressible, obéissant au critère de Von-Mises. On trouvera plus de détails dans [12].

Le matériau élastoplastique parfait en 3D est alors adapté pour l'interface-colle élastoplastique parfaite. Ici la description est faite pour le cas d'une seule interface (film de colle). Cette présentation est choisie pour des raisons de simplicité mais avec *MPFEAP*, on peut bien entendu traiter le cas de multicouches avec plus de 2 couches et donc plus d'une interface élastoplastique, et donc des  $\tau_1^{j,i+1}$ ,  $\tau_2^{j,i+1}$ ,  $v^{j,i+1}$  pour chaque interface.

Pour la mise en oeuvre numérique du modèle plastique une adaptation de l'algorithme de retour radial (ou de projection) est implémenté dans le code d'éléments finis *MPFEAP* (détails dans [16]).

Comme application, un joint à double recouvrement qui subit un cycle de charge-décharge-charge est considéré (Fig.6), cellule hachurée). Afin de tester l'algorithme, le schéma de chargement est sous la forme charge-décharge-

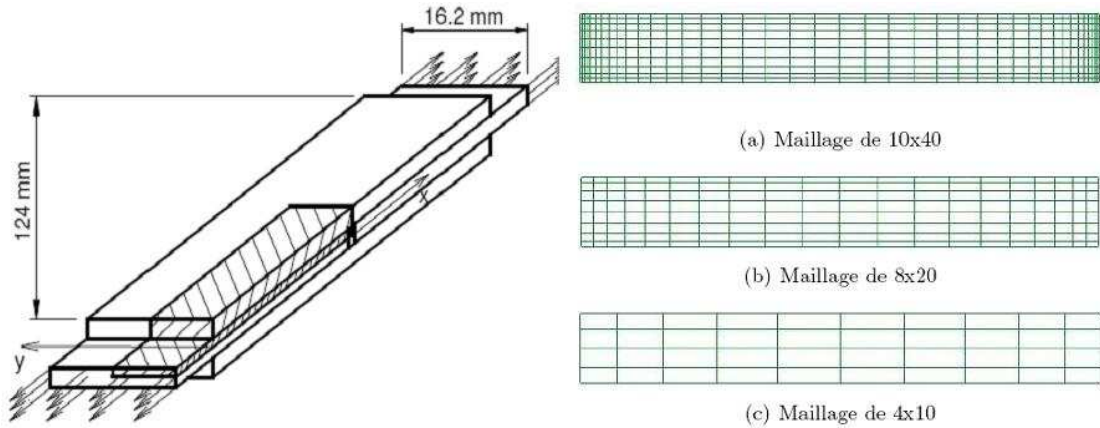


FIG. 6. Joint à double recouvrement étudié et maillages 2D utilisés

charge (fig. 7).

Après une étude de convergence du maillage, les contraintes de cisaillement et d'arrachement de l'interface-colle obtenus par *MPFEAP* sont comparées avec ceux obtenus par un modèle 3D dans *ABAQUS<sup>TM</sup>* (8 éléments dans l'épaisseur des substrats, 4 dans celle de la colle, raffinement important en extrémité de joint). Ces contraintes généralisées du modèle correspondent dans *ABAQUS<sup>TM</sup>* respectivement aux moyennes des contraintes 3D de la colle (cisaillement relativement constant dans l'épaisseur, moins vrai pour l'arrachement) et aux déplacements relatifs entre les deux surfaces supérieure et inférieure de la colle.

La contrainte  $\tau_x$  de l'interface aux points de charge A à F est calculé et représentée en A,A',B,C,E,F sur les figures 8



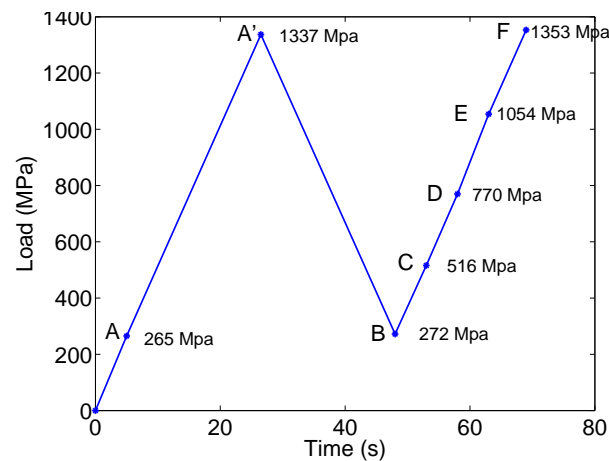
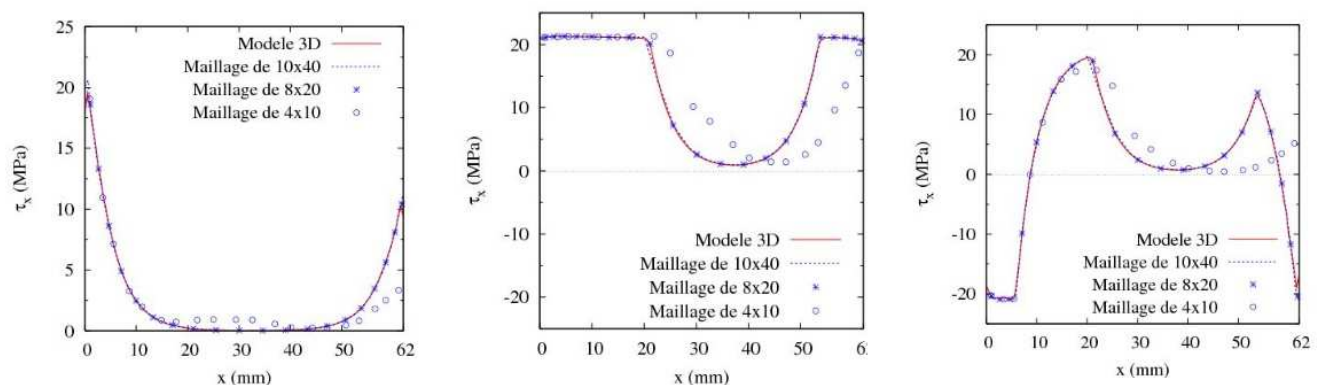


FIG. 7. Schéma de chargement

et 9. Les maillages de  $8 \times 20$  et  $10 \times 40$  donnent des résultats très proches de ceux obtenus par *ABAQUS*<sup>TM</sup>. Il est intéressant de constater l'état de contrainte complexe après décharge et rechargement bien rendu par ce modèle 2D. En particulier l'état de précharge en B où le joint est quasiment déchargé, présente cependant des cisaillements en extrémités négatifs et importants. Non présentée ici, la comparaison entre glissements du modèle et ceux d'*ABAQUS*<sup>TM</sup> est extrêmement positive. Tout ceci donne beaucoup de sens au modèle proposé ici, en reliant notamment cisaillement d'interface et cisaillement 3D moyen ou encore glissement et déplacement relatif 3D. Le temps de calcul passe de 7h à 25', le nombre de degré de liberté étant divisé par 100.

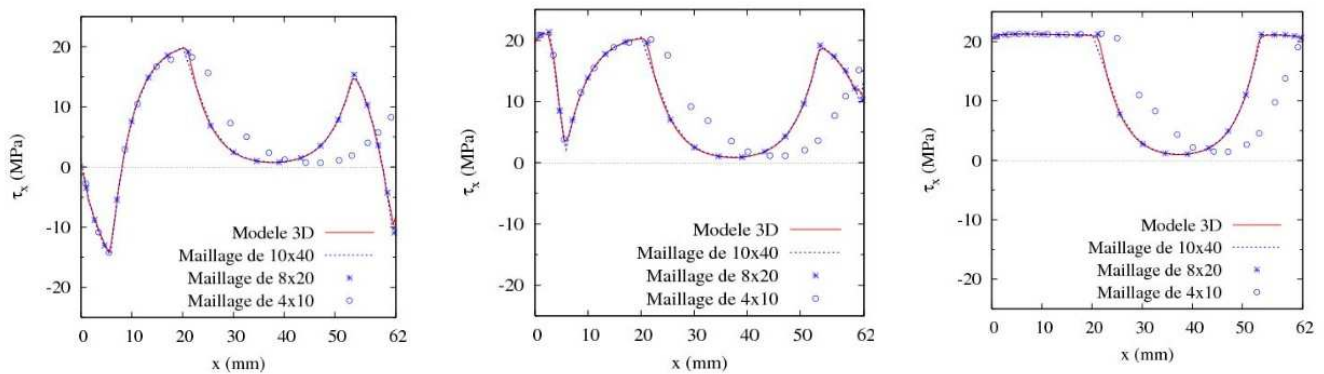
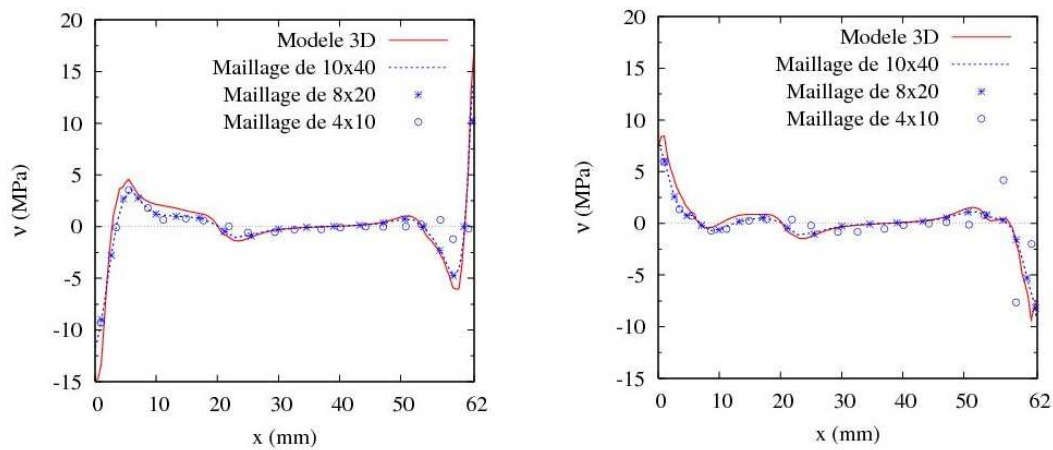
FIG. 8. La contrainte de cisaillement  $\tau_x$  durant le cycle charge-décharge-charge en (de G.à D.) A, A' et B

La contrainte d'arrachement entre les couches  $v$  (fig. 10) obtenue par *MPFEAP* est également très proche de celle calculée par *ABAQUS*<sup>TM</sup>, particulièrement au point de charge A où presque toute la colle reste à l'état élastique. Aux autres points de charge B et F, les formes du diagramme de la contrainte des 2 modèles sont identiques.

#### 4. Conclusion

Dans cet article il a été présenté les derniers développements numériques réalisés autour d'un modèle layerwise permettant désormais de prendre en compte des interfaces non parfaites, glissements et déformations plastiques. Des applications concernant des poutres mixtes connectées élastiquement et des assemblages collés par un matériau élastoplastique de type Von Mises ont été présentées. Ainsi il a pu être mis en évidence les avantages de *MPFEAP* qui sont les suivants :

- Comme on ne maille pas l'épaisseur, le maillage dans *MPFEAP* est beaucoup plus simple que celui mis en oeuvre dans *ABAQUS*<sup>TM</sup> 3D par exemple. Le nombre de degrés de liberté est ainsi considérablement diminué. Dans l'application sur joint collé, un rapport de 1/100 existe entre le nombre de maille *MPFEAP* et *ABAQUS*<sup>TM</sup>.

FIG. 9. La contrainte de cisaillement  $\tau_x$  durant le cycle charge-décharge-charge en C, E et FFIG. 10. La contrainte normale  $v$  durant le cycle charge-décharge-charge en B et F

Bien évidemment, dans le cas d'un multicouche, ce rapport diminue encore d'avantage avec le nombre d'interface.

- Le temps de calcul de *MPFEAP* est donc beaucoup plus faible que celui d'*ABAQUS*<sup>TM</sup> (25 minutes par rapport à 7 heures).
- Les résultats de *MPFEAP* ne sont pas singuliers aux bords et donc des critères de rupture, délaminage ou seuils de déformations plastiques portant sur ces contraintes au bord peuvent être proposés. C'est ce qui avait été fait dans [11], où des confrontations entre une approche analytique du problème de bord libre avec le  $\mathcal{M}4-5n$  avec interfaces frontière sans épaisseur et une étude expérimentale de délaminage sur des composites carbone-epoxy avait permis de valider des critères en contrainte maximale au bord (cisaillements et arrachement d'interface) et en taux de restitution d'énergie. De tels critères sont à mettre en place ici, en utilisant par exemple une déformation ou une longueur plastifiée limite par exemple, comme cela a été montré dans [17].

L'implémentation de cet élément dans *ABAQUS*<sup>TM</sup> est en cours.

## Références

- [1] O. Polit, M. Touratier, A multilayered/sandwich triangular finite element applied to linear and non-linear analyses. *Composites structures*, Vol.58 Issue 1 Pages : 121-128, 2002

- [2] R.P. Carreira , J.F. Caron ,A. Diaz Diaz, Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations, *Mechanics of Materials*, 34, 217-246, 2002.
- [3] D. Leguillon, G. Marion, R. Harry and F. Lécuyer, The onset of delamination at stress-free edges in angle-ply laminates - analysis of two criteria. *Composites Science and Technology*, Volume 61, Issue 3, Pages 377-382, 2001
- [4] O. Allix and P. Ladevèze, Interlaminar interface modelling for the prediction of laminate delamination. *Compos Struct*, 22, pp. 235-242, 1992.
- [5] P. Ladevèze, G. Lubineau, D. Marsal, Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, Volume 66, Issue 6, Pages 698-712, 2006.
- [6] F. Lebon , R. Rizzoni, S. Ronel-Idrissi, Asymptotic analysis of some non-linear soft thin layers, *Computers and Structures*, 82, 1929-1938, 2004
- [7] T. Naciri, A. Chabot, A. Ehrlacher, Interlaminar stress analysis with a new multiparticle modelization of multilayered materials (M4), *Composites Science and Technology*, 58, 337-379, 1998
- [8] N.J. Pagano, Stresses fields in composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 14, 385-400, 1978.
- [9] E. Carrera , C0 Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 39, pp. 1797-1820, 1996
- [10] V.T. Nguyen, J.F. Caron , A new finite element for free edge effect analysis in laminated composites. *Computers Structures*, 84, 1538-1546, 2006.
- [11] J.F. Caron and A. Diaz Diaz and R.P. Carreira and A. Chabot and A. Ehrlacher, Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials, *Composites Science and Technology*, 2006, 66(6), p.755-765.
- [12] G.S.A.L. Rios and R.C. Balderas and V.A. Duong and J.F. Caron and A. Ehrlacher and G. Foret and A. Diaz Diaz, Laminated plates with plastic interfaces : Modeling and calculation, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 17 (2009)
- [13] Pham H. S., Ponts mixtes bois-béton - comportement à la fatigue de la connexion, PhD thesis ENPC, 2007
- [14] Z.Q. Cheng and L.H. Hea and S. Kitipornchaib, Influence of imperfect interfaces on bending and vibration of laminated composite shells, *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(15), p.2127-2150,
- [15] Z. Q. Yue and J.H. Yin, Backward Transfer-Matrix Method for Elastic Analysis of Layered Solids with Imperfect Bonding, *Journal of Elasticity*, 1998, 50(2), p.109-128.
- [16] Duong, V. A., Développement en dynamique d'un élément fini multicouche avec interfaces imparfaites. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.
- [17] Chataigner S., Conception et dimensionnement d'un ancrage de hauban plat. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2008.